# LA MAGIA DE LOS CUADRADOS MÁGICOS

Pedro Alegría (*)

El estudio de los llamados *cuadrados mágicos* ha estado siempre presente en la matemática recreativa. No sólo su propiedad fundamental, "la suma de todos los números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal es constante", sino que algunos de los métodos ideados para su construcción son tan ingeniosos que merecen el apelativo de "mágicos".

Los cuadrados mágicos han estado presentes en todas las épocas y culturas del conocimiento humano, han sido objeto de veneración religiosa, se han utilizado como elementos mágicos y místicos, han merecido un lugar destacado en diversas manifestaciones artísticas e industriales e, incluso, han despertado el interés entre los más ilustres matemáticos a lo largo de la historia, no sólo por su componente recreativa o didáctica. Algunos de los resultados matemáticos relativos a los cuadrados mágicos tienen aplicaciones importantes a diversos campos del conocimiento científico.

Sin pretender aportar nuevas propiedades de estos elementos matemáticos, ofrecemos aquí una exposición de algunas de sus peculiaridades y características principales y describiremos algunas aplicaciones que justifiquen su apelativo de "mágicos", no en el contexto de la magia mística sino en el del ilusionismo. Este enfoque puede proporcionar una nueva manera de introducir contenidos matemáticos en programas didácticos y divulgativos en diferentes etapas de la formación educativa.

## 1. INTRODUCCIÓN

Por definición, un *cuadrado mágico de orden n* es un tablero cuadrado formado por n filas y n columnas en las que se escriben los $n^2$ primeros números naturales, de modo que sea constante la suma de los números de cualquier fila, cualquier columna y cualquiera de las dos diagonales.

No es un ejercicio difícil determinar que dicho valor constante, llamado *constante mágica*, es igual a $n(n^2+1)/2$. Para obtener este resultado, basta dividir por n la suma de los $n^2$ primeros números naturales.

En un contexto más general, utilizamos también el término cuadrado mágico incluso si se elimina la restricción de que la matriz esté formada por los $n^2$ primeros números naturales.

Un caso particular de estos cuadrados mágicos generales, que se han puesto de moda con el popular pasatiempo llamado SUDOKU, lo constituyen los cuadrados latinos. Un *cuadrado latino de orden n* es un tablero cuadrado formado por n filas y n columnas en las que se escriben n números distintos pero dispuestos de modo que cada número aparece una y sólo una vez en cada fila y columna.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 2 |

Ejemplo de cuadrado latino de orden 3

(*) Dpto. Matemáticas, Universidad del País Vasco.

Es famoso el problema de los oficiales propuesto por **Leonhard Euler** en 1779, el cual ha sido origen de importantes resultados en Combinatoria y Teoría de Grafos, así como en diseño de experimentos estadísticos. El problema, cuya respuesta es negativa, se plantea como sigue:

> "De cada uno de seis regimientos distintos se escogen seis oficiales de distinto rango, por ejemplo general, coronel, capitán, teniente, alférez y sargento. Queremos colocar los 36 oficiales en seis filas de seis personas cada una de manera que en ninguna fila y ninguna columna haya dos oficiales del mismo rango ni del mismo regimiento. ¿Es posible dicha disposición?"

En su aspecto recreativo, es también muy conocido el solitario de los naipes, cuya solución animamos a descubrir. Su planteamiento es el siguiente:

> "De una baraja se extraen las cuatro figuras, sota, caballo, rey y as de todos los palos. Se pide colocar las 16 cartas formando un cuadrado 4 x 4 de modo que cada fila y columna contenga únicamente una carta de cada valor y de cada palo".

## 2. ASPECTOS HISTÓRICOS

Los cuadrados mágicos se conocen desde la antigüedad (año 2800 a.C.) por los chinos. Se dice que su origen se remonta a la leyenda del “Lo Shu” (Shu significa libro en chino):

En una época pasada, grandes inundaciones asolaron una región de China. Los pobladores intentaron apaciguar la cólera del río Lo (el actual río Amarillo) ofreciendo sacrificios, pero no lograron dar con la cantidad adecuada hasta que observaron una tortuga que llevaba en la concha unos símbolos en forma de cuadrado mágico 3 x 3, con lo que dedujeron que el número adecuado era precisamente el 15, suma de todas las filas, columnas y diagonales.

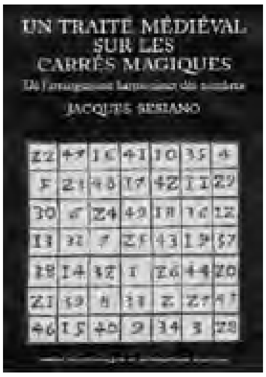
| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

Los chinos dieron un entorno místico a esa figura pues asignaron, a los números, los principios básicos de la vida: los números pares simbolizaron el principio *yin*, de lo femenino, y los impares el principio *yang*, de lo masculino. El centro del cuadrado está ocupado por el 5), que simboliza la Tierra y representa el equilibrio entre el *yin* y el *yang* pues pertenece a las filas, a las columnas y a las diagonales. En los lados se representan los cuatro elementos principales: los *metales* (4 y 9), el *fuego* (2 y 7), el *agua* (1 y 6) y la *madera* (3 y 8).

En el Renacimiento se utilizaron cuadrados mágicos con fines terapéuticos. Por esto, como amuleto para ahuyentar la melancolía, los astrólogos de la época “recetaban” cuadrados mágicos de orden cuatro. Muestra de ello es la pintura del alemán **Alberto Durero,** quien puso un cuadrado mágico de cuarto orden en posición dominante en su grabado *Melancolía*.

Otros tipos de cuadrados mágicos no corrieron la misma suerte pues era de mal augurio estar en posesión de ellos. Algunos eran “diabólicos” pues, al intercambiar algunas filas o columnas, se mantienen sus propiedades. Otros eran “satánicos” porque seguían siendo un cuadrado mágico cuando se elevaba cada uno de sus números al cuadrado o al cubo.

Los pueblos árabes atribuían a los cuadrados mágicos propiedades misteriosas. A partir de una obra de un autor anónimo árabe del siglo XI, que se conserva en Estambul, **Jacques Sesiano** ha realizado en 1996 la reproducción, traducción y comentarios que se muestran en el libro titulado *Un traité médiéval sur les carrés magiques*, cuya tapa mostramos. El libro explica los métodos generales de construcción de cuadrados mágicos de cualquier dimensión.




Se trata del texto más antiguo que se conserva sobre el estudio sistemático de los cuadrados mágicos.

La introducción de los cuadrados mágicos en Europa se produjo en el siglo XIV a través de los árabes por intermedio del monje griego **Manuel Moschopoulos,** quien publicó un libro basado en los descubrimientos del matemático árabe Al-Buni. También aquí fueron considerados como amuletos y talismanes contra diversas enfermedades.

Una teoría completa de construcción de cuadrados mágicos ya aparece en el tratado *Ganita-Kaumudi* (año 1356) del matemático hindú **Narayana Pandit.**

En el siglo XVI aparece la obra de **Cornelius Agrippa,** *De occulta Philosophia*, escrita en 1533. En ella se construyen cuadrados mágicos de órdenes 3 a 9, llamados tabulae Saturni, Jovis, Martis, Solis, Veneris, Mercurii y Lunae, cada uno de ellos asociado a uno de los siete planetas conocidos (incluyendo el Sol y la Luna). La imagen "Tabula Saturni" de dicha obra corresponde a un cuadrado de orden 3 y de constante 15, como muestra la figura adjunta.

En 1838 aparece la obra de **B. Violle** *Traité complet des carrés magiques pairs et impairs, simplex et composés, a bordures, compartiments, chassis, équerre, etc., suivi d'un traité des cubes magiques*, en dos volúmenes. El libro ha sido digitalizado y puede encontrarse en http://books.google.es/books?id=5kADAAAAQAAJ.

Los cuadrados mágicos han utilizado en diferentes manifestaciones artísticas, como muestran los siguientes ejemplos.

En la fachada del templo Parashvanatha en la ciudad india de Khajuraho se encuentra el cuadrado mágico de la figura, cuya constante mágica es 34:

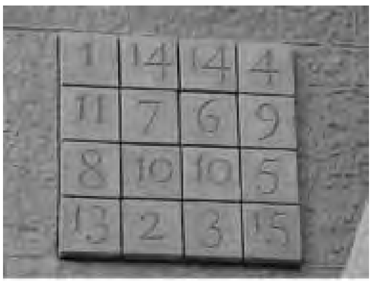
| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 12 | 1 | 14 |
| 2 | 13 | 8 | 11 |
| 16 | 3 | 10 | 5 |
| 9 | 6 | 15 | 4 |

Este es un *cuadrado mágico pandiagonal*, es decir en el que también es constante la suma de los números de las diagonales secundarias.

La imagen que mostramos a continuación es un grabado en cobre titulado *Melancolia* de **Alberto Durero,** y muestra un cuadrado mágico en el cual aparece la fecha de finalización del cuadro, 1514. Otras informaciones indican que la última fila contiene incluso la fecha de fallecimiento de su esposa, día 4 del año 1514, mes 1 (Enero).


En dicho cuadrado existen hasta 86 diferentes combinaciones de cuatro números cuya suma es el número mágico 34. Pero tiene más propiedades mágicas: la suma de los cuadrados de los números de las dos primeras filas (o columnas) es igual a la suma de los cuadrados de los números de las dos últimas filas (o columnas). Además, la suma de los cuadrados de los números de filas (o columnas) alternadas (primera y tercera, segunda y cuarta) es la misma. Otro hecho asombroso es que la suma de los cuadrados de los números situados sobre las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los números no situados sobre las diagonales, propiedad que también se cumple con los cubos.

El siguiente cuadrado mágico fue diseñado por el escultor **Josep Subirachs** para la fachada de la Pasión de la Sagrada Familia:




Su característica principal consiste en que la suma de las filas y columnas es 33, la supuesta edad de Cristo en el momento de su muerte.

Se trata a su vez de un cuadrado supermágico, pues es innumerable la cantidad de combinaciones que pueden realizarse para conseguir la misma suma.

Los cuadrados mágicos han aparecido también en el arte figurativo. La escultura que mostramos en la figura adjunta es obra del artista **Patrick Ireland** y se encuentra en el jardín de la galería de arte de Eaton en West Palm Beach, Florida. Representa un cuadrado mágico de orden 3 en el que los números se han sustituido por bloques de diferentes tamaños.

Métodos generales de construcción de cuadrados mágicos se deben a **Bachet, La Loubère, Meyer, Conway** y muchos otros. Posteriormente ilustraremos algunos de sus métodos. Todavía actualmente se estudian sus propiedades y se obtienen clasificaciones generales. **Éduard Lucas** bautizó con el nombre de *cuadrados diabólicos* a cuadrados mágicos con propiedades adicionales muy sorprendentes.

Solamente existe un cuadrado mágico (salvo simetrías y rotaciones) de orden tres, 880 cuadrados mágicos de orden cuatro (descritos en su totalidad por **Bérnard Frenicle de Bessy** en 1693) y 275.305.224 cuadrados mágicos de orden 5, número obtenido por **Richard Schroeppel** mediante un programa de ordenador en 1973. El número de cuadrados mágicos crece considerablemente al aumentar el orden, pero no se conoce una fórmula general para determinar el número de cuadrados mágicos de cualquier orden.

Los cuadrados mágicos ilustran de forma atractiva propiedades aritméticas así como de factorización de enteros. Su teoría y métodos de construcción pueden aplicarse en la resolución de sistemas de ecuaciones con muchas incógnitas.

## 3. JUEGOS DE MAGIA CON CUADRADOS MÁGICOS

En esta sección presentamos algunos juegos relacionados con cuadrados numéricos con propiedades mágicas y mostramos algunos métodos ingeniosos de construcción de cuadrados mágicos. Su interés no se limita a su característica recreativa sino que presentan valiosas cualidades pedagógicas.

### 3.1 Calendarios mágicos

El siguiente juego de adivinación con un calendario se basa en una propiedad de los cuadrados que contienen números dispuestos en orden creciente. Aunque no sean cuadrados mágicos propiamente dichos, contienen una constante mágica que es la suma de ciertos valores de los cuadrados.

El desarrollo del juego es el siguiente:

- Busca un calendario y escoge cualquier mes.

- Forma un cuadrado de tamaño 4 x 4. Se muestra un ejemplo en la figura siguiente.

| L | M | X | J | V | S | D |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 28 | 29 | 30 | | | | |

- Encierra en un círculo cualquier número del cuadrado elegido y tacha todos los números de su misma fila y columna.
- Encierra en un nuevo círculo cualquier número no tachado y tacha todos los que se encuentren en su misma fila y columna.
- Repite el proceso hasta que queden seleccionados cuatro números.
- Suma los cuatro números seleccionados.

Una vez conocida la suma, es posible saber rápidamente los números que forman el cuadrado elegido.

*Solución*: Al dividir por cuatro el resultado final y restar 12 al cociente se obtiene el extremo superior izquierdo del cuadrado elegido. Es fácil ahora deducir el resto de números teniendo en cuenta las características de los calendarios.

Resultados similares pueden obtenerse utilizando cuadrados de distintos tamaños. Para ello han de aplicarse las propiedades de las progresiones aritméticas y sus sumas. Por ejemplo, si se utiliza un cuadrado 3 x 3, se divide por tres el resultado final y se resta cuatro para obtener el número superior izquierdo del cuadrado.

## 3.2 Cuadrado mágico reversible

Como una variante del juego anterior se puede realizar la predicción inversa, en la que se adivina la suma de los números elegidos por el espectador. El juego que describimos a continuación es original de **Walter Gibson** (1938) y modificado posteriormente por **Maurice Kraitchik** (1942).

Sigue las siguientes instrucciones:

- Dibuja un cuadrado de tamaño 4 x 4 y rellena todos los cuadros con las cifras 1 al 16, siguiendo el orden natural.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

- Selecciona un número cualquiera del cuadrado y tacha los demás números que estén en la misma fila y columna que el número señalado.
- Repite esta operación cuatro veces (a la cuarta ocasión sólo puedes elegir un único número, pues todos los demás ya han sido elegidos o tachados).

- Finalmente, suma esos cuatro números.

A pesar de la total libertad de elección, el resultado de la suma es 34.

*Explicación*: Basta observar que cada uno de los cuatro números seleccionados está en una fila y columna diferentes. Además la suma de ellos es la misma que la suma de los números en la diagonal principal (llamada traza de la matriz):

$$1 + 6 + 11 + 16 = 34.$$

Veamos por qué:

Partimos por ejemplo de la suma de los números de la primera fila

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Si cambiamos uno de ellos por el correspondiente de la segunda fila, la suma aumenta en 4; al cambiar otro de ellos por el correspondiente de la tercera fila, la suma aumenta en 8; y al cambiar el restante por su correspondiente de la cuarta fila, la suma aumenta en 12. En definitiva, independientemente del elemento que cambiemos, la suma total será

$$10 + 4 + 8 + 12 = 34.$$

Toda disposición cuadrada con estas características recibe el nombre de cuadrado mágico reversible. Posee las siguientes propiedades generales:

1. La suma de dos números situados en esquinas opuestas de cualquier diagonal es igual a la suma de los dos números de las esquinas en la diagonal opuesta.
2. La suma de los dos extremos en cualquier fila o columna es igual a la suma de los dos números interiores de dicha fila o columna.

Los cuadrados reversibles pueden construirse de la siguiente forma general:

- Elegir un número.
- Descomponerlo en ocho sumandos.
- Formar la tabla de sumar con los sumandos.
- El resultado de sumar cuatro números de distinta fila y columna es independiente de las filas y columnas escogidas.

**Ejemplo.** Para construir un cuadrado mágico reversible cuya suma sea 30, podemos hacer la descomposición

$$30 = 2 + 5 + 10 + 1 + 3 + 6 + 1 + 2$$

y formar la tabla siguiente:

| | 2 | 5 | 10 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 8 | 13 | 4 |
| 6 | 8 | 11 | 16 | 7 |
| 1 | 3 | 6 | 11 | 2 |
| 2 | 4 | 7 | 12 | 3 |

Por último se eliminan los números que encabezan las filas y las columnas y el cuadrado que resulta tiene la característica deseada.

Este método permite construir cuadrados reversibles con cualquier número de filas y columnas. Basta seguir las indicaciones anteriores descomponiendo el número mágico en más o menos sumandos.

## 3.3 Cuadrado mágico instantáneo

Este juego, original de **Royal V. Heath** y publicado por **John Hilliard** en el libro *Greater Magic*, permite simular gran habilidad en la construcción de un cuadrado mágico cuya suma constante sea elegida por un espectador.

Para realizar el juego, pide a un espectador que nombre un número cualquiera, entre 23 y 100.

A continuación, escribe en una hoja de papel una tabla cuadriculada de tamaño 4 x 4 y, rápidamente, rellena cada cuadro con los siguientes números:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | 1 | 12 | 7 |
| 11 | 8 | b | 2 |
| 5 | 10 | 3 | c |
| 4 | d | 6 | 9 |

Observa que la mayoría de cuadros contiene un valor fijo, independiente de la elección del número. Sólo hay cuatro números que dependen del resultado deseado. Si llamamos N al número elegido, para conseguir un cuadrado mágico con constante igual a N, sustituye los valores “a”, “b”, “c” y “d” por N – 20, N – 21, N – 18 y N – 19, respectivamente.

Por ejemplo, si el número elegido es N = 31, la tabla quedaría así:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11 | 1 | 12 | 7 |
| 11 | 8 | 10 | 2 |
| 5 | 10 | 3 | 13 |
| 4 | 12 | 6 | 9 |

Se puede comprobar que es un cuadrado mágico, pues la suma de las filas, las columnas y las diagonales es igual a N. Además se trata de un cuadrado pandiagonal pues también es igual a N la suma de los valores de las diagonales secundarias. Más aún, es un cuadrado perfecto, pues muchas otras combinaciones de cuatro números suman N. Invitamos a descubrir las más de 30 combinaciones de números con los que se llega al mismo resultado.

## 3.4 Cuadrado mágico casi instantáneo

El juego anterior tiene dos inconvenientes: si el número elegido es demasiado alto, hay una gran discrepancia entre los valores de los números que forman el cuadrado; además, el juego no puede repetirse porque la mayoría de los números son siempre los mismos. La siguiente versión permite disimular aún más el principio utilizado.

Aprende de memoria el siguiente cuadrado mágico cuya suma es 30:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 2 | 12 | 7 |
| 4 | 15 | 1 | 10 |
| 3 | 8 | 6 | 13 |
| 14 | 5 | 11 | 0 |

A continuación, pide a un espectador que nombre cualquier número, que llamaremos N.

Realiza secretamente la siguiente operación: C = (N – 30)/4.

Si la división es exacta, construye rápidamente un cuadrado sumando C a todos los elementos del cuadrado original que has memorizado. Se obtiene así un cuadrado mágico cuya suma es el número elegido por el espectador.

Si la división no es exacta, suma C a todos los elementos del cuadrado original y además suma el resto de dicha división a los números en negrita (los mayores que 11). Nuevamente has obtenido un cuadrado mágico con el número elegido por el espectador.

Por ejemplo, si el número elegido es N = 75, se obtiene el valor C = 11 y el resto es 1. El cuadrado mágico que se obtiene es

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20 | 13 | **24** | **18** |
| 15 | **27** | 12 | **21** |
| 14 | **19** | 17 | **25** |
| **26** | 16 | **22** | 11 |

## 3.5 Cuadrado mágico del cumpleaños

Mostramos a continuación la forma de construir un cuadrado mágico personalizado con la fecha de nacimiento de cualquier persona. El juego es original de **Leslie Vincent** y ha sido publicado por **Alan Shaxon** en la revista mágica *Linking Ring*.

El desarrollo del juego es el siguiente:

1. Pide a una persona que nombre la fecha de su cumpleaños. Para seguir las explicaciones, supongamos que se trata del 12 de marzo de 1957.
2. Escribe en una hoja de papel estos datos: 12/03/57. Mientras tanto, calcula mentalmente 3 · (D + M + A) y anuncia que se trata de su número mágico.
3. Construye un cuadrado mágico de tamaño 3 x 3 en base a la siguiente distribución:

| | | |
|---|---|---|
| x7 | x1 | x8 |
| x3 | x6 | x5 |
| x4 | x9 | x2 |

Las cantidades a escribir en cada cuadro son las siguientes:

| | |
|---|---|
| X1 = A | (57) |
| X2 = X1 + D | (57 + 12 = 69) |
| X3 = X2 + D | (69 + 12 = 81) |
| X4 = X1 + M | (57 + 03 = 60) |
| X5 = X4 + M | (60 + 03 = 63) |
| X6 = X2 + M | (69 + 03 = 72) |
| X7 = X6 + M | (72 + 03 = 75) |
| X8 = X3 + M | (81 + 03 = 84) |
| X9 = X8 + M | (84 + 03 = 87) |

Se puede comprobar que el cuadrado obtenido es mágico y que la constante mágica es precisamente el valor indicado desde el principio.

En el ejemplo propuesto, el cuadro final queda de la forma:

| | | |
|---|---|---|
| 75 | 57 | 84 |
| 81 | 72 | 63 |
| 60 | 87 | 69 |

*Explicación*: El método utilizado asegura que se trata de un cuadrado mágico de suma constante 3D + 3M + 3A. Basta observar el cuadrado siguiente, con los valores indicados en cada casilla.

| | | |
|---|---|---|
| A + D + 2M | A | A + 2D + M |
| A + 2D | A + D + M | A + 2M |
| A + M | A + 2D + 2M | A + D |

Otro cuadrado mágico, relacionado con el cumpleaños, puede realizarse de la siguiente manera:

1. Un espectador nombra su fecha de nacimiento. Seguiremos de nuevo las explicaciones con el 12 de marzo de 1957.
2. Anuncia que a dicha fecha le corresponde el número de la suerte 91. En el caso general, dicho número se obtiene sumando los valores día + mes + dos primeras cifras del año de nacimiento + dos últimas cifras del año de nacimiento. No digas la operación que has realizado para obtener el número de la suerte.
3. Dibuja un cuadrado de tamaño 4 x 4 y escribe en la primera fila los cuatro números citados, donde A = día, B = mes, C = dos primeras cifras del año, D = dos últimas cifras del año. Termina de construir el cuadrado teniendo en cuenta las reglas siguientes:

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | B | C | D |
| C+1 | D-1 | A+1 | B-1 |
| D-2 | C-2 | B+2 | A+2 |
| B+1 | A+3 | D-3 | C-1 |

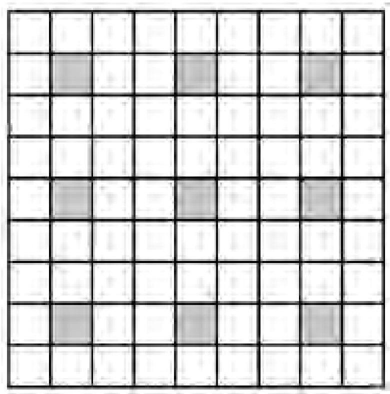
Es fácil comprobar que se trata de un cuadrado mágico con la constante anunciada.

### 3.6. Sudoku relámpago

El matemático y mago austriaco **Werner Miller,** autor de muchos juegos de magia matemática, ha ideado un método de construcción de un sudoku bajo condiciones aparentemente muy restrictivas. Sigue las indicaciones que describimos a continuación.

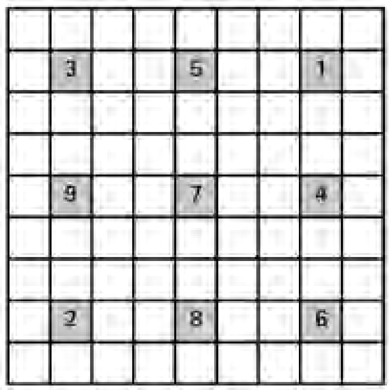
Asegura al público que tienes gran habilidad en realizar un SUDOKU de forma extraordinariamente rápida y con la configuración inicial que elija un espectador.

Para demostrarlo, enseña un tablero de SUDOKU en blanco, como el que se muestra a continuación.



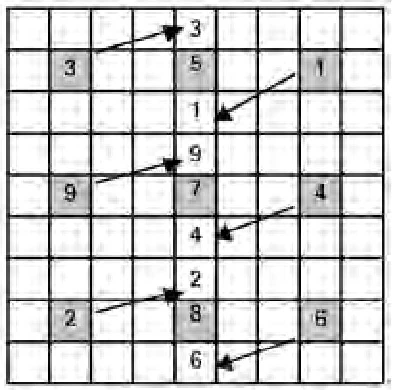
Pide a un espectador que escriba los números del 1 al 9, en el orden que prefiera pero sin repetir, en las nueve casillas sombreadas.

Supongamos, por ejemplo, que el espectador escribe los números siguientes:




A partir de los números ya escritos, para rellenar todo el cuadro, realiza los siguientes pasos:

1. Escribe todos los números de la columna central siguiendo la dirección de las flechas de la siguiente figura:



2. De forma similar, escribe todos los números de la fila central siguiendo las flechas de la siguiente figura:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 3 | | | | |
| | 3 | | | 5 | | | 1 | |
| | | | | 1 | | | | |
| | | | | 9 | | | | |
| 3 | 9 | 2 | 5 | 7 | 8 | 1 | 4 | 6 |
| | | | | 4 | | | | |
| | | | | 2 | | | | |
| | 2 | | | 8 | | | 6 | |
| | | | | 6 | | | | |

3. Completa el resto del cuadro escribiendo todas las filas de modo que se mantenga el orden cíclico basado en la fila central, tomando como referencia los números ya escritos de la columna central. En nuestro caso, para la primera fila escribiremos los valores 9-2-5-7 a partir del 3 y los valores 8-1-4-6 delante del 3. Quedaría así:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 1 | 4 | 6 | 3 | 9 | 2 | 5 | 7 |
| | 3 | | | 5 | | | 1 | |
| | | | | 1 | | | | |
| | | | | 9 | | | | |
| 3 | 9 | 2 | 5 | 7 | 8 | 1 | 4 | 6 |
| | | | | 4 | | | | |
| | | | | 2 | | | | |
| | 2 | | | 8 | | | 6 | |
| | | | | 6 | | | | |

Realizando el mismo proceso con el resto de las filas, es fácil completar el cuadro y comprobar que, efectivamente, se trata de un SUDOKU válido (cada fila, columna y cuadrado de tamaño 3 x 3 contiene todos los números sin repeticiones).

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 1 | 4 | 6 | 3 | 9 | 2 | 5 | 7 |
| 6 | 3 | 9 | 2 | 5 | 7 | 8 | 1 | 4 |
| 2 | 5 | 7 | 8 | 1 | 4 | 6 | 3 | 9 |
| 1 | 4 | 6 | 3 | 9 | 2 | 5 | 7 | 8 |
| 3 | 9 | 2 | 5 | 7 | 8 | 1 | 4 | 6 |
| 5 | 7 | 8 | 1 | 4 | 6 | 3 | 9 | 2 |
| 4 | 6 | 3 | 9 | 2 | 5 | 7 | 8 | 1 |
| 9 | 2 | 5 | 7 | 8 | 1 | 4 | 6 | 3 |
| 7 | 8 | 1 | 4 | 6 | 3 | 9 | 2 | 5 |

Como se observa fácilmente, con esta construcción no se cumple la condición de unicidad del SUDOKU, ya que existen muchas soluciones con los mismos datos iniciales. Simplemente, la disposición inicial permite una construcción rápida y sencilla de todo el cuadrado.

# 4. MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN DE CUADRADOS MÁGICOS

A simple vista, la construcción de un cuadrado mágico de orden n requiere la resolución de un sistema de 2n+2 ecuaciones, n para las filas, n para las columnas y dos para las diagonales, de modo que podrían aplicarse los métodos de resolución de sistemas lineales. Es fácil deducir que este planteamiento requiere realizar una gran cantidad de cálculos y muchas de las incógnitas no están unívocamente determinadas. Por esta razón, a lo largo de la historia se han ido desarrollando métodos alternativos de construcción de cuadrados mágicos más o menos ingeniosos.

En el ya mencionado libro *Ganita-Kaumudi*, Narayana clasifica los cuadrados en grupos de lados 4n, 4n + 1, 4n + 2 y 4n + 3. También muestra métodos generales de construcción en algunos de los grupos y métodos particulares para otros, como el del movimiento del caballo de ajedrez para los cuadrados de orden 4n. En esta sección mostraremos algunos de los métodos más sencillos para construir cuadrados mágicos de cualquier orden.

## 4.1 Cuadrados de orden impar

- Método “Lozenge” de Conway
  1. Se selecciona el rombo central (en el ejemplo está señalado con el símbolo “X”).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | X | | | |
| | | X | X | X | | |
| | X | X | X | X | X | |
| X | X | X | X | X | X | X |
| | X | X | X | X | X | |
| | | X | X | X | | |
| | | | X | | | |

  2. Se va rellenando dicho rombo (de abajo arriba y de izquierda a derecha) con números impares consecutivos.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 7 | | | |
| | | 5 | 13 | 21 | | |
| | 3 | 11 | 19 | 27 | 35 | |
| 1 | 9 | 17 | 25 | 33 | 41 | 49 |
| | 15 | 23 | 31 | 39 | 47 | |
| | | 29 | 37 | 45 | | |
| | | | 43 | | | |

  3. Se continúa rellenando las diagonales (siempre de abajo arriba) con números pares consecutivos bordeando el rombo inicial (y pasando al cuadro inferior como continuación del cuadro superior, así como al cuadro izquierdo como continuación del derecho).

Primera diagonal extendida:

| | | | | 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 7 | | | |
| | | 5 | 13 | 21 | | |
| | 3 | 11 | 19 | 27 | 35 | |
| 1 | 9 | 17 | 25 | 33 | 41 | 49 |
| | 15 | 23 | 31 | 39 | 47 | 6 |
| | | 29 | 37 | 45 | 4 | |
| | | | 43 | 2 | | |

Segunda diagonal extendida:

| | | | | | 10 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 7 | 8 | | | |
| | | 5 | 13 | 21 | | | |
| | 3 | 11 | 19 | 27 | 35 | | |
| 1 | 9 | 17 | 25 | 33 | 41 | 49 | |
| 14 | 15 | 23 | 31 | 39 | 47 | 6 | 14 |
| | | 29 | 37 | 45 | 4 | 12 | |
| | | | 43 | 2 | 10 | | |

Sucesivas diagonales extendidas:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 32 | 40 | 48 | 7 | 8 | 16 | 24 |
| 38 | 46 | 5 | 13 | 21 | 22 | 30 |
| 44 | 3 | 11 | 19 | 27 | 35 | 36 |
| 1 | 9 | 17 | 25 | 33 | 41 | 49 |
| 14 | 15 | 23 | 31 | 39 | 47 | 6 |
| 20 | 28 | 29 | 37 | 45 | 4 | 12 |
| 26 | 34 | 42 | 43 | 2 | 10 | 18 |

- Método siamés (también llamado método hindú o de La Loubère).
  1. Se escribe el número 1 en la fila central de la primera columna (o en la columna central de la primera fila).
  2. Mediante un recorrido diagonal (hacia la derecha y hacia arriba) se rellenan los cuadros libres con números consecutivos (continuando en la fila inferior al llegar a la fila superior). Se acaba al llegar al punto de partida.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 4 | | | |
| | | 3 | | | | |
| | 2 | | | | | |
| 1 | | | | | | |
| | | | | | | 7 |
| | | | | | 6 | |
| | | | | 5 | | |

  3. Desde el último número escrito, se desplaza hacia abajo un cuadro y se continúa recorriendo la diagonal de la misma forma.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 4 | 13 | | |
| | | 3 | 12 | | | |
| | 2 | 11 | | | | |
| 1 | 10 | | | | | |
| 9 | | | | | | 7 |
| | | | | | 6 | 8 |
| | | | | 5 | 14 | |

4. Se repite el proceso anterior hasta completar el cuadrado.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 33 | 42 | 44 | 4 | 13 | 15 | 24 |
| 41 | 43 | 3 | 12 | 21 | 23 | 32 |
| 49 | 2 | 11 | 20 | 22 | 31 | 40 |
| 1 | 10 | 19 | 28 | 30 | 39 | 48 |
| 9 | 18 | 27 | 29 | 38 | 47 | 7 |
| 17 | 26 | 35 | 37 | 46 | 6 | 8 |
| 25 | 34 | 36 | 45 | 5 | 14 | 16 |

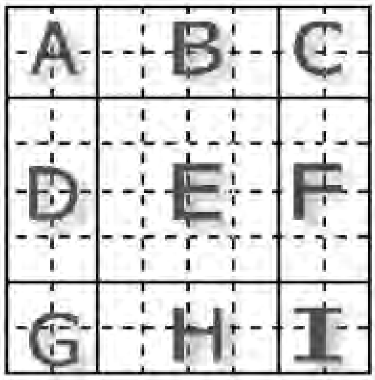
Es también clásico el método de Bachet, explicado por ejemplo en el libro *Problemas y Experimentos Recreativos* de **Yakov Perelman.**

## 4.2 Cuadrados de orden n = 4k

- Método de los nueve bloques (que ilustraremos con el ejemplo 8 x 8).
  1. Se numeran todos los cuadros con los números 1 al 64, consecutivamente de izquierda a derecha y de arriba abajo.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

  2. Se divide el cuadrado en nueve bloques (que llamaremos A, B, C, D, E, F, G, H, I, ordenados de izquierda a derecha y de arriba abajo):




En general, los bloques A, C, G, I son de tamaño n/4 x n/4; B, H son de tamaño n/4 x n/2; D, F de tamaño n/2 x n/4; y el bloque E de tamaño n/2x n/2.

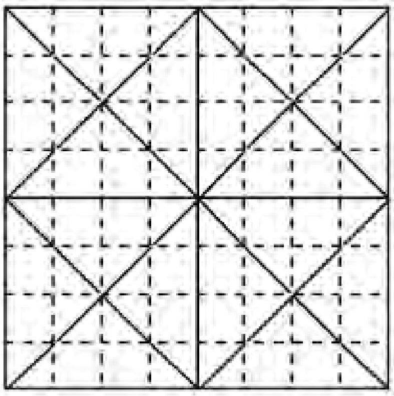
3. Se dejan en los bloques alternos A, C, E, G, I los números escritos inicialmente.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | | | 7 | 8 |
| 9 | 10 | | | | | 15 | 16 |
| | | 19 | 20 | 21 | 22 | | |
| | | 27 | 28 | 29 | 30 | | |
| | | 35 | 36 | 37 | 38 | | |
| | | 43 | 44 | 45 | 46 | | |
| 49 | 50 | | | | | 55 | 56 |
| 57 | 58 | | | | | 63 | 64 |

4. Los números de los bloques B, D, F y H se sustituyen por los simétricos respecto al centro del cuadrado:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 62 | 61 | 60 | 59 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 54 | 53 | 52 | 51 | 15 | 16 |
| 48 | 47 | 19 | 20 | 21 | 22 | 42 | 41 |
| 40 | 39 | 27 | 28 | 29 | 30 | 34 | 33 |
| 32 | 31 | 35 | 36 | 37 | 38 | 26 | 25 |
| 24 | 23 | 43 | 44 | 45 | 46 | 18 | 17 |
| 49 | 50 | 14 | 13 | 12 | 11 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 6 | 5 | 4 | 3 | 63 | 64 |

- Método de inversión de las diagonales (explicado con el ejemplo 8 x 8).
  1. Se numeran todos los cuadros con los números 1 al 64, consecutivamente de izquierda a derecha y de arriba abajo.
  2. Se divide el cuadrado en cuatro bloques de tamaño 4 x 4 (en general serán k bloques de tamaño 4 x 4) y se trazan en cada bloque las dos diagonales.



3. Se dejan en su lugar todos los números de los cuadros no cortados por dichas diagonales.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | | | 6 | 7 | |
| 9 | | | 12 | 13 | | | 16 |
| 17 | | | 20 | 21 | | | 24 |
| | 26 | 27 | | | 30 | 31 | |
| | 34 | 35 | | | 38 | 39 | |
| 41 | | | 44 | 45 | | | 48 |
| 49 | | | 52 | 53 | | | 56 |
| | 58 | 59 | | | 62 | 63 | |

4. En el resto de cuadros, se sustituye cada número por su simétrico respecto al centro del cuadrado.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 64 | 2 | 3 | 61 | 60 | 6 | 7 | 57 |
| 9 | 55 | 54 | 12 | 13 | 51 | 50 | 16 |
| 17 | 47 | 46 | 20 | 21 | 43 | 42 | 24 |
| 40 | 26 | 27 | 37 | 36 | 30 | 31 | 33 |
| 32 | 34 | 35 | 29 | 28 | 38 | 39 | 25 |
| 41 | 23 | 22 | 44 | 45 | 19 | 18 | 48 |
| 49 | 15 | 14 | 52 | 53 | 11 | 10 | 56 |
| 8 | 58 | 59 | 5 | 4 | 62 | 63 | 1 |

**Observación.** Los cuadrados de **Durero** y **Subirachs** son variantes del cuadrado obtenido por este método. Una vez obtenido el cuadrado

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 2 | 3 | 13 |
| 5 | 11 | 10 | 8 |
| 9 | 7 | 6 | 12 |
| 4 | 14 | 15 | 1 |

basta intercambiar las columnas dos y tres para que aparezca la fecha deseada por Durero en las columnas centrales de la última fila.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

Si ahora realizamos una rotación de 180º, llegamos al siguiente:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 14 | 15 | 4 |
| 12 | 7 | 6 | 9 |
| 8 | 11 | 10 | 5 |
| 13 | 2 | 3 | 16 |

Restamos una unidad a los elementos (1,3), (2,1), (3,2) y (4,4), para no perder la característica mágica y disminuir en una unidad la constante:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 14 | 14 | 4 |
| 11 | 7 | 6 | 9 |
| 8 | 10 | 10 | 5 |
| 13 | 2 | 3 | 15 |

El cuadrado es ahora el representado en la Fachada de la Pasión de la Sagrada Familia.

## 4.3 Cuadrados de orden n = 4 k + 2

**Método LUX de Conway**

1. Se construye un cuadrado de tamaño (2k+1) x (2k+1), escribiendo la letra “L” en las k+1 primeras filas, la letra “U” en la fila siguiente y la letra “X” en las k-1 últimas filas.
2. Se intercambia la “L” central con la “U” que está debajo de ella.
3. Se construye el cuadrado mágico de orden 2k+1 siguiendo el recorrido del método siamés en el cuadrado de letras (empezando en la letra central de la fila superior), de la forma siguiente:

Se sustituye cada letra por un cuadrado 2 x 2 llenando los cuadrados con el siguiente grupo de cuatro números consecutivos usando el esquema indicado por la letra.

Los esquemas “L”, “U”, “X” son

L:

| | |
|---|---|
| 4 | 1 |
| 2 | 3 |

U:

| | |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 1 | 4 |

X:

| | |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 3 | 2 |

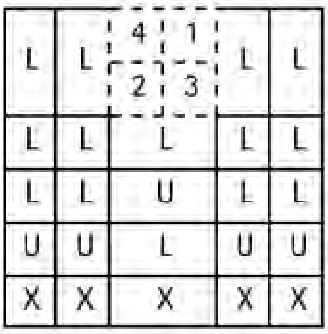
Ejemplo n = 10 (k = 2).

PASOS 1 Y 2:

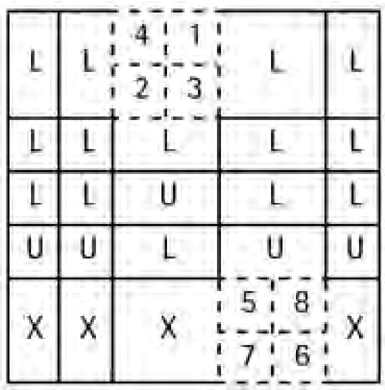
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| L | L | L | L | L |
| L | L | L | L | L |
| L | L | U | L | L |
| U | U | L | U | U |
| X | X | X | X | X |

PASO 3:

Primer desdoble




Segundo desdoble




Primera diagonal

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 4 | 1 | | | | |
| | | | | 2 | 3 | | | | |
| | | 20 | 17 | | | | | | |
| | | 18 | 19 | | | | | | |
| 16 | 13 | | | | | | | | |
| 14 | 15 | | | | | | | | |
| | | | | | | | | 9 | 12 |
| | | | | | | | | 10 | 11 |
| | | | | | | 5 | 8 | | |
| | | | | | | 7 | 6 | | |

Resultado final

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 68 | 65 | 96 | 93 | 4 | 1 | 32 | 29 | 60 | 57 |
| 66 | 67 | 94 | 95 | 2 | 3 | 30 | 31 | 58 | 59 |
| 92 | 89 | 20 | 17 | 28 | 25 | 56 | 53 | 64 | 61 |
| 90 | 91 | 18 | 19 | 26 | 27 | 54 | 55 | 62 | 63 |
| 16 | 13 | 24 | 21 | 49 | 52 | 80 | 77 | 88 | 85 |
| 14 | 15 | 22 | 23 | 50 | 51 | 78 | 79 | 86 | 87 |
| 37 | 40 | 45 | 48 | 76 | 73 | 81 | 84 | 9 | 12 |
| 38 | 39 | 46 | 47 | 74 | 75 | 82 | 83 | 10 | 11 |
| 41 | 44 | 69 | 72 | 97 | 100 | 5 | 8 | 33 | 36 |
| 43 | 42 | 71 | 70 | 99 | 98 | 7 | 6 | 35 | 34 |

Para finalizar, enunciaremos sin demostración algunas propiedades mediante las cuales pueden construirse cuadrados mágicos a partir de otros ya construidos.

1. Si se suma o resta el mismo valor a todos los números de un cuadrado mágico, el resultado es otro cuadrado mágico.
2. Si se multiplica o divide por el mismo valor a todos los números de un cuadrado mágico, el resultado es otro cuadrado mágico.
3. Si se suman los términos correspondientes de dos cuadrados mágicos, el resultado es otro cuadrado mágico.
4. Si en un cuadrado mágico se intercambian dos filas y después dos columnas de modo que las cuatro estén a la misma distancia del centro, el resultado es otro cuadrado mágico.
5. Si se divide un cuadrado mágico de tamaño par en cuatro cuartos iguales y se cambian simultáneamente –y sin girar– los cuartos opuestos, el resultado es otro cuadrado mágico.

Por último, una curiosidad: el desarrollo decimal de la fracción 1/19 tiene un periodo formado por 18 cifras. Las sucesivas fracciones de denominador 19 contienen las mismas cifras en el mismo orden cíclico y, con ellas, puede construirse el siguiente cuadrado mágico (de suma 81):

| | |
|---|---|
| 1/19 = 0,052631578947368421 | 10/19 = 0,526315789473684210 |
| 2/19 = 0,105263157894736842 | 11/19 = 0,578947368421052631 |
| 3/19 = 0,157894736842105263 | 12/19 = 0,631578947368421052 |
| 4/19 = 0,210526315789473684 | 13/19 = 0,684210526315789473 |
| 5/19 = 0,263157894736842105 | 14/19 = 0,736842105263157894 |
| 6/19 = 0,315789473684210526 | 15/19 = 0,789473684210526315 |
| 7/19 = 0,368421052631578947 | 16/19 = 0,842105263157894736 |
| 8/19 = 0,421052631578947368 | 17/19 = 0,894736842105263157 |
| 9/19 = 0,473684210526315789 | 18/19 = 0,947368421052631578 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 |
| 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 |
| 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 |
| 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 |
| 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 |
| 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 |
| 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 |
| 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 |
| 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 |
| 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 |
| 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 |
| 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 |
| 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 |
| 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 |
| 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 |
| 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 |
| 8 | 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 |
| 9 | 4 | 7 | 3 | 6 | 8 | 4 | 2 | 1 | 0 | 5 | 2 | 6 | 3 | 1 | 5 | 7 | 8 |

De hecho, este cuadrado es el más pequeño que se puede construir con los decimales de una fracción periódica. El siguiente cuadrado mágico que se puede construir a partir de un número cíclico corresponde a la parte periódica de 1/383.

Este cuadrado fue diseñado por **Harry A. Sayles** como observa **W. S. Andrews** en su libro, *Magic Squares and Cubes*, publicado en 1917.

## PARA SABER MÁS


[1] **Berlekamp, E., Conway, J., y Guy, R.,** 1982: *Winning Ways for your Mathematical Plays*.

[2] **Carlavilla, J. L., y Fernández, M.,** 2000: *Cuadrados Mágicos*. Proyecto Sur de Ediciones.

[3] **Dörmann, M.,** *The Perfect Magic Square*. members.aol.com/mdormann/tricks/vernon.html

[4] **Dyment, D.,** *How to construct a forcing matrix*. www.oratory.com/deceptionary/aboutmatrices.html

[5] **Gardner, M.,** 1988: *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*. Labor.

[6] **Gardner, M.,** 2001: *Training the Mind and Entertaining the Spirit*.

[7] **Giraldo, C.,** *Matemática Insólita*. matematicainsolita.8m.com/Index.html

[8] **Heinz, H.,** *Magic Squares, magic stars and other patterns*. www.geocities.com/~harveyh/index.htm

[9] **Lucas, É.,** 2008: *Cuadrados Mágicos de Fermat*. RBA.

[10] **Molina, M.,** *Cuadrados mágicos*. www.geocities.com/cuadradosmagicos/

[11] **Perelman, Y.,** *Experimentos maravillosos*. www.geocities.com/problemasyexperimentos/cap22em.html

[12] **Simon, W.,** 1964: *Mathematical Magic*.

[13] **Zimmerman, G.,** *About the Subirachs Magic Square,* en www.markfarrar.co.uk/gzimmerman01.htm